

Глава 3

Кодирование и обработка числовой информации

3.1. Кодирование числовой информации

3.1.1. Представление числовой информации с помощью систем счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются **системами счисления**. Алфавит системы счисления состоит из знаков, которые называются цифрами.



Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью знаков некоторого алфавита, называемых цифрами.

Все системы счисления делятся на две большие группы: **позиционные** и **непозиционные** системы. В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных — не зависит.

Непозиционные системы счисления. Как только люди начали считать, у них появилась потребность в записи чисел. Найдены археологов на стоянках первобытных людей свидетельствуют о том, что первоначально количество предметов отображали равным количеством каких-либо знаков: зарубок, черточек, точек.

Такая система записи чисел называется **единичной**, так как любое число в ней образуется путем повторения одного знака, символизирующего единицу (рис. 3.1). Единичной системой счисления пользуются малыши, показывая на пальцах свой возраст или используя для этого счетные палочки.

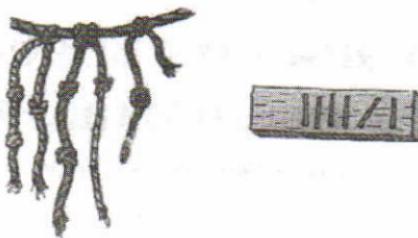


Рис. 3.1. Единичная система счисления

Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить **римская система счисления**, которая начала применяться более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме.

В основе римской системы счисления лежат знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 используются латинские буквы C, D и M (рис. 3.2).

1	I	11	XI	30	XXX	400	CD
2	II	12	XII	40	XL	500	D
3	III	13	XIII	50	L	600	DC
4	IV	14	XIV	60	LX	700	DCC
5	V	15	XV	70	LXX	800	DCCC
6	VI	16	XVI	80	LXXX	900	CM
7	VII	17	XVII	90	XC	1000	M
8	VIII	18	XVIII	100	C	2000	MM
9	IX	19	XIX	200	CC	3000	MMM
10	X	20	XX	300	CCC	4000	MMMM

Рис. 3.2. Римская система счисления

В римской системе счисления значение цифры не зависит от ее положения в числе. Например, в римском числе XXX (30) цифра X встречается трижды и в каждом случае обозначает одну и ту же величину — число 10, три раза по 10 в сумме дают 30.



Чтобы записать число в римской системе счисления, необходимо разложить его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков, единиц. Например, десятичное число 28 представляется следующим образом:

$$10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = \text{XXVIII}$$

(два десятка, пяток, три единицы).

При записи чисел в римской системе счисления применяется правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к большему знаку, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из большего знака.

Например, римское число IX обозначает $9 (-1 + 10)$, а XI обозначает $11 (10 + 1)$. Например, число 99 имеет следующее представление в римской системе счисления:

$$\text{XCIX} = -10 + 100 - 1 + 10$$

Позиционные системы счисления. Каждая позиционная система счисления имеет определенный алфавит цифр и основание. Основание системы равно количеству цифр (знаков) в ее алфавите.

В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе. Позиция цифры в числе называется **разрядом**. Разряды числа возрастают справа налево, от младших разрядов к старшим, причем значения цифр в соседних разрядах числа различаются в количестве раз, равное основанию системы.

В настоящее время наиболее распространенной позиционной системой счисления является десятичная система. В информатике широко используются двоичная, восьмичная и шестнадцатеричная системы счисления.

Десятичная система счисления (табл. 3.1). В десятичной системе счисления крайняя справа позиция соответствует минимальному значению, в которой цифра обозначает единицы, цифра, смещенная на одну позицию влево, обозначает десятки, еще левее — сотни, затем тысячи и т. д. Рассмотрим в качестве примера десятичное число 555. Цифра 5 встречается в числе трижды, причем самая правая обозначает пять единиц, вторая справа — пять десятков и, наконец, третья — пять сотен.



Число в позиционной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания, в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Выше десятичное число 555 было записано в привычной для нас **свернутой форме**. Мы настолько привыкли к такой форме записи, что уже не замечаем, как в уме умножаем цифры числа на различные степени числа 10, которое является основанием десятичной системы счисления.

В развернутой форме записи числа умножение цифр числа на основание производится в явной форме. Так, в развернутой форме запись числа 555 в десятичной системе будет выглядеть следующим образом:

$$555_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Для записи десятичных дробей используются разряды с отрицательными значениями степеней основания. Например, число 555,55 в развернутой форме будет записано следующим образом:

$$555,55_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Умножение или деление десятичного числа на 10 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной, на один разряд вправо или влево. Например:

$$\begin{aligned} 555,55_{10} \cdot 10 &= 5555,5_{10}; \\ 555,55_{10} : 10 &= 55,555_{10}. \end{aligned}$$

Двоичная система счисления (см. табл. 3.1). Числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы ряда степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

Например, развернутая запись двоичного числа выглядит следующим образом:

$$A_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2},$$

а в свернутой форме:

$$A_2 = 101,01_2.$$

Умножение или деление двоичного числа на 2 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд вправо или влево. Например:

$$\begin{aligned} 101,01_2 \cdot 2 &= 1010,1_2; \\ 101,01_2 : 2 &= 10,101_2. \end{aligned}$$

Восьмеричная система счисления (см. табл. 3.1). В восьмеричной системе основание равно 8 и алфавит состоит из восьми цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Запишем восьмеричное число в свернутой и развернутой форме:

$$77_8 = 7 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0.$$

Шестнадцатеричная система счисления (см. табл. 3.1). В шестнадцатеричной системе основание равно 16 и алфавит состоит из шестнадцати цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}, причем первые десять цифр имеют об-

щепринятое обозначение, а для записи остальных цифр {10, 11, 12, 13, 14, 15} используются первые шесть букв латинского алфавита. Запишем шестнадцатеричное число в свернутой и развернутой формах:

$$\begin{aligned} \text{ABCDEF}_{16} &= A \cdot 16^5 + B \cdot 16^4 + C \cdot 16^3 + D \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = \\ &= 10 \cdot 16^5 + 11 \cdot 16^4 + 12 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0. \end{aligned}$$

Таблица 3.1. Позиционные системы счисления

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F



Первая позиционная система счисления была придумана еще в древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была шестидесятеричной, т. е. в ней использовалось шестьдесят цифр! Интересно, что до сих пор при измерении времени мы используем основание, равное 60 (в 1 минуте содержится 60 секунд, а в 1 часе — 60 минут).

В XIX веке довольно широкое распространение получила двенадцатеричная система счисления. До сих пор мы часто употребляем дюжину (число 12): в сутках две дюжины часов, круг содержит тридцать дюжин градусов и т. д.

Контрольные вопросы

- Чем отличаются позиционные системы счисления от непозиционных?
- Каково основание десятичной системы счисления? Двоичной системы счисления? Восьмеричной системы счисления? Шестнадцатеричной системы счисления?
- Какие цифры входят в алфавит десятичной системы счисления? Двоичной системы счисления? Восьмеричной системы счисления? Шестнадцатеричной системы счисления?